مبرهنة:

اذا كانت نصف الزمرة S منتهية ويقبل كل من عناصرها يميناً ويساراً يقبل القسمة يميناً ويساراً على كل عنصر من عناصرها فإن S زمرة

البرهان:

ليكن $a,b \in S$ فإنه يوجد $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ بحيث يكون

$a = x_1 g$ $a = g y_1$ $g = x_2 b$ $g = b y_2$

g تقبل القسمة على b من اليمين واليسار g تقبل القسمة على a من اليمين واليسار

وبالتالي فإن

$$a = x_1 g = x_1 x_2 b = (x_1 x_2) b$$

$$a = g y_1 = b y_2 y_1 = b(y_1 y_2)$$

أي أن:

$a = xb$ هو حل المعادلة $x = x_1 x_2$

$a = by$ هو حل المعادلة $y = y_1 y_2$

وبالتالي فإن S تكون زمرة

مثال:

لتكن $G_1, G_2$ زمرتين ما بحيث أن $G_1 \cap G_2 = \phi$ ولتكن $S = G_1 \cup G_2$ ولنعرف قانون تشكيل داخلي على S كما يلي:

لتكن $a,b \in S$ فإذا كانت $a,b$ في زمرة واحدة ($G_1$ أو $G_2$) فإن ناتج $ab$ هو نفسه في زمرتها أما إذا كانت $a \in G_1$ , $b \in G_2$ فإن

$$ab = ba = b$$

إن العملية التجميعية محققة على S وذلك لأن لدينا الحالات الممكنة التالية

(1) $a, b, c \in G_1$ أو $(a, b, c \in G_2)$ عندئذ يكون

$$a(bc) = (ab)c$$

لأن كل من $G_1 , G_2$ زمرة

(2) إذا كان $a, b \in G_1$ و $c \in G_2$ :

$$a(bc) = ac = c$$

$$(ab)c = c$$

3) إذا كانت $a,b \in G_2$ ، $c \in G_1$ :

$a(bc) = a.b$ ، $(ab)c = ab$

4) $a \in G_2$ ، $b,c \in G_1$ :

$a(bc) = a$ ، $(ab)c = ac = a$

5) $a \in G_1$ ، $b,c \in G_2$

$a(bc) = bc$ ، $(ab)c = bc$

6) $b \in G_2$ ، $a,c \in G_1$

$a(bc) = a.b = b$ ، $(ab)c = b.c = b$

7) $b \in G_1$ ، $a,c \in G_2$

$a(bc) = ac$ ، $(ab)c = ac$

نجد في جميع الحالات الممكنة نجد أن الخاصية التجميعية محققة مع S مبالتالي S هي نصف زمرة

كما أنه محايد $\forall a \in G_1$ فإن

$as = a(G_1 \cup G_2) = aG_1 \cup aG_2 = G_1 \cup G_2 = S$

$Sa = (G_1 \cup G_2)a = G_1a \cup G_2a = G$

$\forall a \in G_1 : aS = Sa = S$

مجموعة عناصر المحايد S هي $G_1$ أي أن $B = G_1$

أعطنا محايد $b \in G_2$ محايد فإنه يوجد $x,y \in S$ بحيث يكون $s \in S$

$xs = b$ ، $sy = b$

وذلك لأنه إذا كانت $s \in G_2$ فإن المعادلتين السابقتين لها حل في $G_2$ وذلك لأنه

$\forall s \in G_2$ ، $sG_2 = G_2s = G_2 \Leftrightarrow$ زمرة G

أما إذا كانت $s \in G_1$ فيوجد حل وحيد $x = y = b$

فنجد أن الى ليس لها حل مبالتالي تحت جميع عناصر $G_2$ تقبل القسمة أي عنصر منعزل

من $S$ أي أن $c = c_2$

تعريف :

لتكن $(S,*)$ و $(S',\cdot)$ نصفي زمرتين ولتكن $f: S \to S'$ تطبيقاً من $S$ إلى $S'$ فإننا نسمي $f$ هومومورفيزم إذا حقق الشرط

$$\forall x,y \in S \qquad f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$$

وغالباً ما نكتب $f(xy) = f(x)\, f(y)$

- إذا كان $f$ هومومورفيزم متباين ندعوه مونومورفيزم
- إذا كان $f$ " تقابلي ندعوه ايزومورفيزم
- إذا كان $f$ " وكان $S=S'$ ندعوه اندومورفيزم
- إذا كان $f$ " وتقابلي وكان $S=S'$ ندعوه أوتومورفيزم

نتكلم عن $S$ , $S'$ أنهما هومومورفيتان إذا وجد بينهما هومومورفيزم، ونقول أنهما إيزومورفيتان إذا وجد بينهما ايزومورفيزم

تمرين: أثبت أنه إذا كانت $S$ زمرة و $f$ هومومورفيزم من $S$ إلى نصف الزمرة $S'$ فإن $f(S)$ هي نصف زمرة جزئية من $S'$

الحل:

يكفي أن نبرهن أن $f(S)$ مغلقة

$$\forall a,b \in f(S) \Rightarrow \exists\, x,y \in S \; ; \; a = f(x)$$
$$b = f(y)$$
$$a.b = f(x)\, f(y) = f(\underbrace{xy}_{\in S}) \in f(S)$$

وبالتالي فإن $f(S)$ نصف زمرة من $S'$

مثال: لتكن $M$ مجموعة ما غير خالية ولتكن $S$ مجموعة جزئية من $P(M)$ بحيث يكون

$$\forall A,B \in S \; ; \; A \cap B \in S$$

إن $(S,\cap)$ تكون نصف زمرة تبديلية (لأن عملية التقاطع تبديلية وتجميعية) وكل عنصر من عناصرها جامد وذلك لأنه $\forall A \in S \Rightarrow A \cap A = A$

مبرهنة :

إن أي شبه زمرة تبديلية E ايزومورفية مع نصف الزمرة S حيث S محتواة في $P(E)$ مجهزة بعملية التقاطع

البرهان :

لتكن $A_e \subseteq E$ هي مجموعة كل العناصر من E التي تقبل القسمة يمينًا ويسارًا على العنصر e من E أي أن $A_e = eE \cap Ee = eE$ وبذلك إذا كان $e, f \in E$ فإن $A_{ef} = A_e \cap A_f$ ولنبرهن ذلك نثبت أن

$$x \in A_{ef} \Rightarrow x \in efE \Rightarrow \exists a \in E \quad \text{بحيث}$$

$$x = efa = fea \in fE = A_f$$

$$x = efa \in eE = A_e$$

ومنه نستنتج أن

$x \in A_e \cap A_f$ أي أن $A_{ef} \subseteq A_e \cap A_f$ 

وكذلك لنثبت أن $A_e \cap A_f \subseteq A_{ef}$ وذلك لأن

$$x \in A_e \cap A_f \Rightarrow x \in A_e \ \& \ x \in A_f$$

$$\Leftarrow \quad \exists a, b \in E \ ; \ x = ea \ \& \ x = fb$$

$$x = x^2 = eafb = ef(ab) \in efE = A_{ef}$$

$$\Rightarrow x \in A_{ef} \Rightarrow A_e \cap A_f \subseteq A_{ef}$$

من الاحتوائين نتج المساواة

$$A_{ef} = A_e \cap A_f$$

لتكن

$$S = \{ A_e \subseteq E \ ; \ e \in E \}$$

ولنعرف التطبيق

$$h : E \longrightarrow S$$
$$e \longmapsto A_e$$

فإن h هومومورفيزم وذلك لأن

$$\forall e, f \in E \qquad h(ef) = A_e \cap A_f = h(e) \cap h(f)$$

وبالتالي فإن h هومومورفيزم

كذلك فإن h تقابل لأنه بفرض $h(e) = h(f)$

$k(e)=k(f) \Rightarrow Ae = Af$

$e = e^2 \in eE = Ae \quad f = f^2 \in fE = Af \} \Rightarrow$

$e \in Af \Rightarrow e \in fE \Rightarrow \exists x \in E \; ; \; e = fx$

$f \in Ae \Rightarrow f \in eE \Rightarrow \exists y \in E \; ; \; f = ey \} \Rightarrow$

$e = fx = eyx = fxyx = fx^2y = fxy = ey = f$ متبادلين

$\Rightarrow e = f \Rightarrow$

لتكن $A \in S \Rightarrow$ يوجد عنصر $e \in E$ بحيث أن $A = Ae$ بالتالي وجدنا عنصر $e \in E$ بحيث أن

$k(e) = Ae = A$ .

اذن k غامر وبالتالي k ايزومورفيزم اذن $E$ و $S$ ايزومورفيان

انتهت المحاضرة